

Problema de eletromagnetismo: Uma abordagem exploratória computacional

Alexandre Ribeiro Fernandes Azevedo¹, Henrique Couto Toledo², Carlos Henrique dos Santos Barbosa³ e Frederico Alan de Oliveira Cruz⁴

¹UFRRJ, Curso de Licenciatura em Física, ²UERJ -Programa de Pós Graduação em Física, ³UFRJ, COPPE/Lab2M, ⁴UFRRJ, Departamento de Física/PET-Física. E-mails: [1alexaazevedo@gmail.com](mailto:alexaazevedo@gmail.com), 2henriqcouto@gmail.com, 3cls.henry@coc.ufrj.br, 4frederico@ufrj.br.

Resumo: As aplicações de técnicas computacionais, como o uso de uma linguagem computacional, podem favorecer o entendimento dos vários fenômenos físicos existentes e abordados em sala de aula. Nesse trabalho, apresentamos o resultado do estudo computacional do comportamento do vetor deslocamento, ao rotacionar o tensor permissividade, quando é aplicado um campo elétrico constante. O trabalho foi realizado usando como elemento motivacional uma questão apresentada em um livro de eletromagnetismo, onde a partir do seu enunciado foi construída uma rotina em linguagem computacional Fortran. Essa abordagem foi realizada no sentido de discutir as características de um material e a sua resposta quando sobre ele é aplicado um campo elétrico, visto a possibilidade de realizar diferentes análises do fenômeno de interesse, permitindo entender o objeto de estudo através da reprodução total ou parcial dos resultados esperados. A atividade permitiu criar a possibilidade de introduzir os métodos computacionais como uma ferramenta de discussão e compreensão das características e fenômenos físicos, mesmo que esta não seja uma disciplina de Física Computacional efetivamente.

Palavras chave: Fortran, permissividade, vetor deslocamento.

Title: Electromagnetism problem: A computational approach.

Abstract: The available computational techniques, like the use of a computer language, can aid the understanding of several existing physical phenomena and learned in classroom. In this work, we present the behavior of displacement field when we rotate the tensor permittivity when a constant electric field is present. This paper's work was motivated to fully understand a common electromagnetic problem presented in several textbooks, which we wrote a Fortran routine to better evaluate it. This approach was done to better discuss the material properties and it's response when it's in the presence of a electric field, considering the different possible phenomena, permitting understanding of the object of study through total or partial reproduction of expected results. The activity allowed the possibility of introducing computational methods as a tool of discussion and comprehension of characteristics and physical phenomena, even it not being a Computational Physics course.

Keywords: Fortran, permittivity, electric displacement field.

Introdução

Os estudos dos conceitos eletromagnéticos, abordados nos cursos de Eletromagnetismo, muitas vezes se restringem a apresentação das propriedades permissividade (ϵ), medida em F/m, permeabilidade (μ), medida em H/m, e condutividade (λ), medida em $1/\Omega\text{m}$, sem realmente discutir a sua relação entre causa e efeito. Essas propriedades são apresentadas efetivamente quando são discutidas às relações constitutivas do meio:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad (1)$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (2)$$

$$\vec{J} = \lambda \vec{E} \quad (3)$$

onde \vec{J} representa o vetor densidade de corrente, \vec{E} é o campo elétrico, \vec{D} é o vetor deslocamento elétrico ou polarização, \vec{H} é o vetor campo magnético e \vec{B} o vetor indução magnética. Elas são apresentadas quase sempre como quantidades escalares e quase nunca tensoriais.

Essas grandezas constitutivas, por definição, independentes desses vetores, são funções de ponto (Macedo, 1988; Pinto, 2010) e possuem significados físicos importantes associados a elas. No caso da condutividade elétrica, esta pode ser entendida com a capacidade que um material possui em conduzir corrente elétrica. Quanto maior a condutividade elétrica de um material “mais fácil” os elétrons fluem ao longo dele quando este é submetido a um campo elétrico (Bagnato e Rodrigues, 2006; Molin e Rabello, 2011).

No caso da permeabilidade magnética e da permissividade elétrica, temos que a primeira representa a capacidade de um material de conduzir um fluxo magnético, isto é, interagir com um campo magnético e a segunda é uma medida da capacidade de um material para ser polarizada quando sobre ele é aplicado um campo elétrico (Adiyodi *et al.*, 2009).

O entendimento do comportamento físico de um material quando submetido há alguma interação de caráter elétrico e/ou magnético pode ser realizado pela caracterização dessas grandezas, que em geral sofrem alterações nos seus valores devido à mudança de parâmetros externos, tais como: temperatura, pressão e frequência do campo aplicado (Neves, 2001), isto é, discutir esses parâmetros em sala de aula é de fundamental importância na formação do aluno de graduação.

Como a abordagem experimental dessas propriedades muitas vezes não é possível, uma análise computacional pode atuar como facilitador no processo de ensino-aprendizagem dos conceitos envolvidos. Com o uso dessa ferramenta é possível à realização de diferentes análises das propriedades e dos fenômenos de interesse, por meio de uma simulação numérica de um modelo matemático conveniente que permita compreender o objeto de estudo.

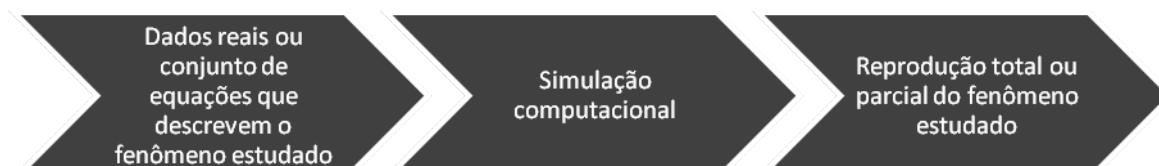


Figura 1. Esquema de análise pelo uso de simulação computacional

O problema abordado e o estudo do vetor deslocamento

Apesar das grandezas acima, serem fundamentais para a completa compreensão do eletromagnetismo, muitos livros voltados para o Ensino Superior dão pouca importância a sua discussão completa. No atual cenário educacional superior o livro didático tem ganhado espaço, por permitir os alunos entendimento do conteúdo ministrado nas salas de aula. Assim, tal qual ocorre na educação básica, o livro didático pode ser considerado como um aliado do professor e um recurso imprescindível para os estudantes de graduação (Nuñes *et al.*, 2001), sendo uma ferramenta preciosa no processo de ensino-aprendizagem.

Devido às diferenças de motivação para o uso do livro didático, é fundamental que o professor, ao adotar um ou vários livros como referências, possa conduzir os alunos a uma reflexão sobre os textos e/ou, no caso das ciências exatas, dos exercícios propostos.

Um exemplo que permite explorar um problema proposto, para trazer um melhor entendimento sobre o tema abordado, está presente no livro "Eletromagnetismo" (Macedo, 1988). Um dos exercícios propostos possui o seguinte enunciado:

"Num certo meio anisotrópico e num dado sistema de coordenadas cartesianas o tensor permissividade elétrica é:

$$\vec{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Conhecido o (a) campo elétrico, determine o vetor deslocamento; (b) vetor deslocamento, determine o campo elétrico".

O enunciado apresenta, inicialmente, a característica tensorial da permissividade elétrica, mas impossibilita maiores conclusões sobre a importância do seu total entendimento. Ela num primeiro momento permite apenas que o estudante trabalhe o "algebrismo", sem haver preocupação na construção de um conhecimento mais amplo. A sua discussão é fundamental visto que as características anisotrópicas são muito frequentes na natureza, como é o caso dos cristais, onde algumas propriedades são mais intensas numa direção e menos intensas em outras (Macedo, 1988; Camargo *et al.*, 2001).

Com um olhar mais cuidadoso para o item (a) do problema é possível analisar e discutir mais profundamente a permissividade elétrica, permitindo mostrar que o efeito do campo dentro do material está associado as suas características, por meio de uma análise da rotação da matriz $\vec{\varepsilon}$ e expressa matematicamente pela relação (Giordano, 2006; Khromova & Melnikov, 2008):

$$\vec{\varepsilon}_r = M \vec{\varepsilon} M^T \quad (5)$$

onde M é a matriz rotação, escrita como (Arfken e Weber, 2001; Slabaugh, 1999):

$$M(\phi, \theta, \psi) = \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \phi - \sin \phi \cos \theta \sin \psi & \cos \psi \sin \phi - \cos \phi \cos \theta \sin \psi & \sin \psi \sin \phi \\ \cos \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \theta \cos \psi & -\sin \psi \sin \phi + \cos \psi \cos \phi \cos \theta & \cos \psi \sin \theta \\ \sin \psi \sin \theta & -\sin \theta \cos \phi & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (6)$$

onde ϕ , θ e ψ , são os ângulos de Euler que representam a rotação no plano xy, rotação no plano yz e rotação no plano xz respectivamente. Com essa rotação é possível escrever o vetor \vec{D} em função do campo \vec{E} aplicado, para cada rotação sofrida pela matriz $\vec{\varepsilon}_r$ (Bertuola *et al.*, 2006):

$$\vec{D} = \vec{\varepsilon}_r \vec{E} = M \vec{\varepsilon} M^T \vec{E} \quad (7)$$

Caracterização da intervenção pedagógica

Para explorar a possibilidade de entendimento sobre as características da permissividade de um corpo, dividimos a atividade em três etapas: (1) determinação algébrica das componentes do vetor \vec{D} , descritos pela equação 6 e no caso do meio ser isotrópico; (2) estabelecimento de uma rotina que permita analisar o comportamento do vetor \vec{D} para diferentes ângulos de rotação; (3) realizar a comparação entre os resultados para a permissividade em um meio isotrópico e aquela expressa na equação (4).]

A determinação algébrica da equação 6 foi obtida pelo uso do software Maple, versão 12, que se caracteriza por ser um pacote comercial, desenvolvido pela Waterloo University Inc. e pelo ETH Zürich (ETHZ), voltado para uso profissional e acadêmico na resolução de problemas que exigem métodos matemáticos (Teixeira *et al.*, 2013).

Uma vez determinada a matriz do vetor deslocamento, passamos a etapa de análise da rotação pela construção da rotina em Fortran 77. Nessa rotina foram especificados os valores dos ângulos sobre os quais consideramos as possíveis rotações do problema, isto é, foram avaliados para quais valores de α , β e γ seriam pertinentes à análise. Após o estabelecimento das condições de análise, foram estudados o comportamento do vetor \vec{D} , no caso da rotação de meio isotrópico e aquela expressa na equação (4).

As características computacionais utilizadas neste estudo foram as seguintes: um computador com processador Intel®CoreTM i7, utilizando o software Geany 0.21, em um sistema operacional Ubuntu 12.04 LTS, usando o compilador gFortran. Esse compilador é baseado no conjunto de compiladores do projeto GNU (GCC), compatível com as versões 77 e 95 do Fortran.

A análise computacional foi realizada pelo desenvolvimento e implementação de uma rotina em linguagem Fortran, que foi escolhida por ainda ser muito utilizada em programação científica por sua precisão numérica e pelo tempo de execução computacional reduzido (Portilho, 2007).

Descrição e análise dos métodos computacionais

Para realizar a análise do problema proposto no livro, considerou-se uma rotação apenas em torno do eixo z, isto é, no plano xy (figura 2).

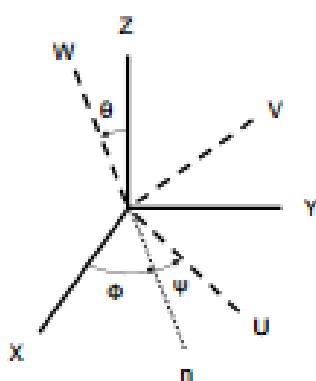


Figura 2. Representação dos ângulos de rotação (García *et al.*, 2006)

Assim, consideramos os ângulos $\theta = 0$ e $\psi = 0$, permitindo escrever a matriz rotação da forma:

$$M(\phi) = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

A obtenção do novo tensor permissividade, depende da determinação da inversa do vetor rotação M, visto que ele será dado pela operação expressa na equação (4). Para evitar o procedimento algébrico, que apesar de importante foge da proposta do problema, esta matriz resolvida no software Maple 12 e usando o conjunto de comandos:

- `r := Matrix([[cos(phi), sin(phi), 0], [-sin(phi), cos(phi), 0], [0, 0, 1]]);`
- `with (LinearAlgebra):`
- `MatrixInverse(r);`
- `ri := simplify(%);`

que ao final fornecem a matriz M^{-1} :

$$M^{-1}(\phi) = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

Com essas matrizes é possível obter a matriz $\tilde{\epsilon}_r$, como descrito pela equação (5) também usando o software Maple 12. Os comandos para resolução dessa álgebra ficam escritos como:

- `epsilon0 := epsilon*Matrix ([[0, 1, 1], [1, 0, 1], [1, 1, 0]]);`
- `Me := MatrixMatrixMultiply(r, epsilon0);`
- `epsilonr := MatrixMatrixMultiply(Me, ri);`

Fornecendo a expressão:

$$\tilde{\epsilon}_r = \epsilon \begin{bmatrix} 2\cos \phi \sin \phi & \cos^2 \phi - \sin^2 \phi & \cos \phi + \sin \phi \\ \cos^2 \phi - \sin^2 \phi & 2\cos \phi \sin \phi & \cos \phi - \sin \phi \\ \cos \phi + \sin \phi & \cos \phi - \sin \phi & 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

Supondo que o campo aplicado apenas na direção x, temos que o vetor campo elétrico \vec{E} será escrito como:

$$\vec{E} = E \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

O produto entre as equações (10) e (11) resultam na expressão:

$$\vec{D}_a = \epsilon E \begin{bmatrix} 2\cos \phi \sin \phi \\ \cos^2 \phi - \sin^2 \phi \\ \cos \phi + \sin \phi \end{bmatrix} \quad (12)$$

No caso da permissividade de um meio isotrópico a permissividade será descrita como:

$$\tilde{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon \end{bmatrix} \quad (13)$$

nessa situação o vetor deslocamento é escrito de forma simples como:

$$\vec{D}_i = \varepsilon E \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

Essas matrizes foram então implementadas por uma rotina em linguagem Fortran, descrita abaixo:

```
double precision de, r
dimension dan(3), dis(3), r(3)
open(unit = 50,file = 'desl_ani.dat', status = 'unknown')
open(unit = 60,file = 'desl_iso.dat', status = 'unknown')
pi = acos(-1.0)
do a = 0, (pi/4), (pi/80)
dan(1) = 2*sin(a)*cos(a);
dan(2) = -(sin(a)**2)+(cos(a)**2)
dan(3) = sin(a) + cos(a)
dis(1) = 1; dis(2) = 0; dis(3) = 0
write(50,*) (dan(i),i = 1,3)
write(60,*) (dis(i),i = 1,3)
end do
stop
end
```

Se considerarmos rotações angulares entre 0 e $\pi/4$ é fácil perceber que a direção do vetor deslocamento em um meio isotrópico (\vec{D}_i) não sobre alteração na sua direção, enquanto que para um meio anisotrópico (\vec{D}_a) a direção é fortemente influenciada pelas rotações sofridas por ε (Tabela 1).

ÂNGULO DE ROTAÇÃO	(Isotrópico)			(Anisotrópico)		
	X	Y	Z	X	Y	Z
0°	1,000	0,000	0,000	0,000	1,000	1,000
5°	1,000	0,000	0,000	0,174	0,985	1,083
10°	1,000	0,000	0,000	0,342	0,940	1,158
15°	1,000	0,000	0,000	0,500	0,866	1,224
20°	1,000	0,000	0,000	0,643	0,766	1,282
25°	1,000	0,000	0,000	0,766	0,643	1,330
30°	1,000	0,000	0,000	0,866	0,500	1,366
35°	1,000	0,000	0,000	0,940	0,342	1,393
40°	1,000	0,000	0,000	0,985	0,174	1,409
45°	1,000	0,000	0,000	1,000	0,000	1,414

Tabela 1. Representação dos valores encontrados para a razão $\frac{D_a}{\varepsilon E}$

Os resultados mostram que dependendo da rotação do tensor \mathbb{E} , os efeitos do campo podem ser neutralizados em determinada direção, como apresentado na Tabela 1 para o ângulo de 45°.

Recomendações para o ensino

O presente trabalho mostrou que através de uma abordagem computacional simples e com custo de tempo computacional pequeno, pode-se realizar um estudo interessante sobre as propriedades constitutivas dos materiais. Foi possível simular as características envolvidas nos processos de aplicação de um campo elétrico e o efeito obtido para o vetor deslocamento. A abordagem de um exercício proposto em um livro didático, através do uso de uma simulação computacional simples, possibilita testar possibilidades em tempo real, isto é, testar alternativas que, em muitas vezes, teriam um custo experimental elevado tanto no que diz respeito ao tempo de elaboração da atividade como em relação ao recurso financeiro utilizado. Finalmente, consideramos que o uso de técnicas computacionais permite compreender um pouco mais do comportamento eletromagnético e assim contribuir no processo de ensino-aprendizagem das propriedades constitutivas e seu real significado.

Referências

- Adiyodi, A. K., Joseph, X., Jyothy, P. V., Jose, G. e Unnikrishnan, N. V. (2009). Dielectric and microhardness studies of methylene blue doped PMMA matrix. *Materials Science-Poland*, 27 (1), 297-305.
- Arfken, G. B. e Weber, H. J. (2001). *Mathematical Methods for Physicists* (5º ed.). New York: Harcourt-Academic Press.
- Bagnato, V. S. e Rodrigues, V. (2006). Análogo mecânico para condutividade elétrica dos metais: Efeito da temperatura. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 28 (1), 35-39.
- Bertuola, A. C., Hussein, M. S. e Pato, M. P. (2006). Técnicas e construções de ensembles de matrizes aleatórias e estatísticas correlatas. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 28 (3), 333-340.
- Camargo, E. C. G., Felgueiras, C. A. e Monteiro, A. M. V. (2001). A importância da modelagem da anisotropia na distribuição espacial de variáveis ambientais utilizando procedimentos geoestatísticos. Em *Simpósio Brasileiro de Sensoriamento Remoto* (395-402).
- García, G., Olivares, J., Agullo-López, F., García-Navarro, A., Agullo-Rueda, F., García-Cabanes, A. e Carrascosa, M. (2006). Effect of local rotations on the optical response of LiNbO_3 : Application to ion-beam damage. *Europhysics Letters*, 76 (6), 1123–1129.
- GEANY (2012). Releases. Disponível em: <http://goo.gl/8TM0N>. Acesso em: 17 abr. 2012.
- GCC WIKI (2012). GFortran — the GNU Fortran compiler, part of GCC. Disponível em: <http://goo.gl/d9vqK>. Acesso em: 17 abr. 2012.
- Giordano, S. (2006). Equivalent permittivity tensor in anisotropic random media. *Journal of Electrostatics*, 64, 655–663.

Khromova, I. A. e Melnikova, L. A. (2008). Dispersion and symmetry properties of anisotropic photonic crystals of arbitrary geometry and dimension. *Photonic Crystal Materials and Devices VIII*, v. 6989, p. 69891V-69891V-12.

MACSI - Mathematics Applications Consortium for Science and Industry. Fortran - Error, accuracy and stability: Lecture 2. (2012). Disponível em: <http://goo.gl/SDV99>. Acesso em 03 nov. 2012.

Macedo, A. (1988). *Eletromagnetismo*. Rio de Janeiro: Guanabara Koogan.

Molin, J. P. e Rabello, L. M. (2011). Estudos sobre a mensuração da condutividade elétrica do solo. *Engenharia Agrícola*, 31 (1), 90-101.

Neves, W. (2012). Materiais Elétricos. Campina Grande: UFCG, 2001. Disponível em: <http://goo.gl/CyrgZ>. Acesso em: 07 ago. 2012.

Nuñez, I. B., Ramalho, B. L., Silva, I. K. P. e Campos, A. P. N. (2001). O livro didático para o ensino de ciências. Selecionalos: um desafio para os professores do ensino fundamental. Em *III Encontro Nacional de Pesquisa em Educação em Ciências*.

Pinto, G. P. (2010). O método GPR aplicado à localização de tubulações utilizadas no abastecimento de água na região urbana do município de Belém-Pará. *Dissertação de Mestrado*. Belém: UFPA.

QtIPLOT (2012). Downloads. Disponível em: <http://goo.gl/w5n16>. Acesso em: 18 abr. 2012.

Santana, C. (2012). *Apostila de Fortran*. Fortaleza: UFCE.

Silva, H. L. S. (2007). *Métodos de otimização aplicados a problemas de inversão de dados de AVO*. Dissertação de Mestrado. Belém: UFPA.

Slabaugh, G. G. (1999). Computing Euler angles from a rotation matrix. Disponível em: <http://goo.gl/1oXqb>. Acesso em: 10 mar. 2012.

Teixeira, P. C. M., Martins, G. A. S., Lopes, D. O. e Nascimento, H. S. (2013). Aplicação do software Maple para ensino da modelagem matemática de um volume de revolução em curso de engenharia. *Enciclopédia Biosfera*, 9 (16), 2423-2432.